

## Kolokwium z Algebry I, 02.12.2024

- Czas trwania kolokwium, to 180 minut.
- W trakcie kolokwium ~~nie można~~ korzystać z notatek, urządzeń elektronicznych, itp.
- Rozwiązanie ~~każdego zadania~~ powinno być zapisane na osobnej kartce.
- Każda kartka ~~powinna zawierać~~: imię i nazwisko, numer albumu i numer grupy ćwiczeniowej.

**Zadanie 1.** Znaleźć wszystkie morfizmy grup  $D_8 \rightarrow \mathbb{C}^*$ , gdzie  $D_8$  to grupa izometrii kwadratu.  $\leftarrow$  zespolone

**Zadanie 2.** Niech  $G$  będzie podgrupą grupy  $S_{10}$  generowaną przez permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 8 & 1 & 3 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Policzyć rząd grupy  $G$ .
- Rozstrzygnąć czy permutacja  $\pi$  jest parzysta czy nieparzysta.
- Działanie grupy  $G$  na zbiór  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  definiujemy formułą  $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$ . Wyznaczyć orbity tego działania.

**Zadanie 3.** Niech  $G$  będzie grupą rzędu 56. Udowodnić, że istnieje nietrywialne działanie grupy  $G$  zarówno na zbiorze 7-elementowym, jak i na zbiorze 8-elementowym.

**Zadanie 4.** Policzyć ile, z dokładnością do izomorfizmu, jest grup abelowych rzędu  $3087 = 3^2 \cdot 7^3$  mających dokładnie:

- 48 elementów rzędu 7.
- 49 elementów rzędu 7.

**Zadanie 5.** Niech  $H$  będzie podgrupą normalną rzędu  $n$  skończonej grupy  $G$ . Dowieść, że gdy liczby  $n$  oraz  $[G : H]$  są względnie pierwsze, to  $H$  jest jedyną podgrupą rzędu  $n$  w  $G$ .